LES SUITES -Partie 2-

I. Rappels sur les suites géométriques

1) Définition et propriété

- Une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = q \times u_n$.

Le nombre q est appelé **raison** de la suite.

- (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 \times q^n$.

2) Limites d'une suite géométrique

q	$0 \leq q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n\to\infty} q^n$	0	1	$+\infty$

Exemples :

$$a)\ \lim_{n\to+\infty} 4^n = +\infty \qquad b)\ \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \qquad c)\ \lim_{n\to+\infty} (1 + 0{,}5^n) = 1$$

$$d)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{3} \qquad e)\ \lim_{n\to+\infty} 1 + 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

3) Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété : n est un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Remarque : Il s'agit de la somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme 1.

Exemple : Calculer la somme S suivante : $S = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{13}$

$$S = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{13} \quad = \frac{1 - 3^{14}}{1 - 3} \quad = 2\,391\,484$$

4) Limite de la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

1) Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

2) Soit (u_n) la suite géométrique de raison 0,2 et de premier terme $u_0 = 4$.
On note $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Calculer la limite de la suite (S_n).

5) Modéliser un problème à l'aide d'une suite géométrique

Voir fiche 1

S'entraîner à un autre problème du même genre : https://youtu.be/XcszOqP9sbk

II. Les suites arithmético-géométriques

1) Définition

Définition : Une suite (u_n) est dite **arithmético-géométrique** s'il existe deux nombres réels a et b tels que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = au_n + b$.

Cas particuliers :

- Si $a = 1$ alors la relation de récurrence devient : $u_{n+1} = u_n + b$ et donc la suite (u_n) est une suite **arithmétique** de raison b
- Si $b = 0$ et $a \neq 0$ alors la relation de récurrence devient : $u_{n+1} = au_n$ et donc la suite (u_n) est une suite **géométrique** de raison a
- Dans les autres cas, la suite n'est ni arithmétique ni géométrique.

Exemple :

Au 1er janvier 2019, une bibliothèque a ouvert ses portes avec un stock de 40000 ouvrages.
Chaque année, il faudra supprimer 5% des ouvrages, trop vieux ou abîmés, et acheter 5500 ouvrages neufs.

On note a_n le nombre, **en milliers**, d'ouvrages disponible le 1er janvier de l'année 2019 + n. On a donc $a_0 = 40$.

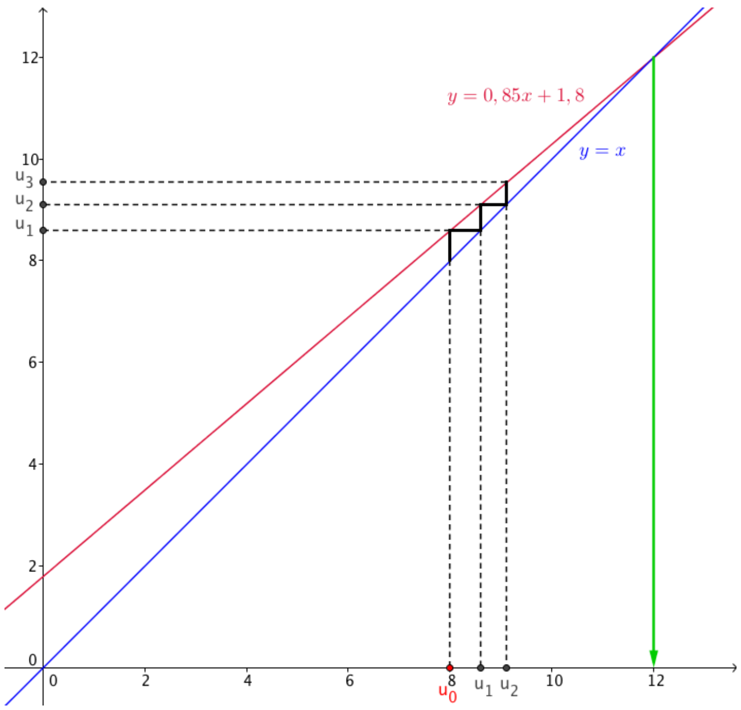
Donner la relation de récurrence définissant la suite (a_n). Quelle est alors la nature de cette suite ?

2) Représentation graphique d'une suite arithmético-géométrique

Exemple d'application :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie par $f(x) = 0{,}85x + 1{,}8$.
1) a) Calculer u_1.
b) Dans un repère orthonormé, tracer la courbe représentative de f et la droite d'équation et $y = x$.
c) Dans ce repère, placer u_0 sur l'axe des abscisses, puis en utilisant les droites précédemment tracées, construire sur le même axe u_1, u_2 et u_3. On laissera apparent les traits de construction.
d) À l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite (u_n).
2) En supposant que la suite (u_n) est convergente, démontrer le résultat conjecturé dans la question 1.c.

1) a) $u_1 = f(u_0) = 0{,}85u_0 + 1{,}8 = 0{,}85 \times 8 + 1{,}8 = 8{,}6$
b) c) - On place le premier terme u_0 sur l'axe des abscisses. On trace l'image de u_0 par f pour obtenir sur l'axe des ordonnées $u_1 = f(u_0)$.
- On reporte u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite d'équation $y = x$.
- On fait de même pour obtenir u_2 puis u_3…



d)

En continuant le tracé, celui-ci se rapprocherait de plus en plus de l'intersection des deux

droites. On conjecture que la limite de la suite (u_n) est 12.

2)

La suite (u_n) converge et la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. La limite L de la suite (u_n) est

donc solution de l'équation $f(L) = L$.
Soit : $0{,}85L + 1{,}8 = L$
$L - 0{,}85L = 1{,}8$
$0{,}15L = 1{,}8$
$L = 1{,}8 : 0{,}15 = 12$

<u>Théorème</u> :
Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle I et soit une suite (u_n) telle que pour tout n, on a : $u_n \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers L de I alors $f(L) = L$.
- Admis –

III. Recherche d'un seuil à l'aide d'un algorithme

A l'aide d'un algorithme on cherche à déterminer un rang à partir duquel une suite croissante de limite infinie est supérieure à un nombre réel A :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 1{,}5u_n - 0{,}8$.
Cette suite est croissante et admet pour limite $+\infty$.

En langage calculatrice et Python, compléter les 2 programmes de gauche et attardons-nous sur le programme Python :

TI	CASIO	Python
PROGRAM:SEUIL :Input A :0→N :2→U :While U<A :N+1→N : :End :Disp N	======SEUIL "A="?→A↵ 0→N↵ 2→U↵ While U<A↵ N+1→N↵ WhileEnd↵ N	def seuil(a): n=0 u=2 while u<a n=n+1 u=1.5*u-0.8 return(n) print(seuil(10))